14 - 1 - 20

__Άσκηση 4__ Έχουμε $\{a_n\}, \{\beta_n\} \subseteq [a, b]$ $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$
και $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f$

__Ν.δ.ο__ $\int_{a_n}^{\beta_n} f_n \longrightarrow \int_a^\beta f$ όταν $a_n \to a, \beta_n \to \beta$

__Λύση:__

$$\int_a^\beta f_n = \int_a^{a_n} f_n + \int_{a_n}^{\beta_n} f_n + \int_{\beta_n}^{\beta} f_n$$

$$\Rightarrow \int_{a_n}^{\beta_n} f_n = \int_a^\beta f_n - \int_a^{a_n} f_n - \int_{\beta_n}^{\beta} f_n$$

__Αρκεί ν.δ.ο__ $\int_a^{a_n} f_n, \int_{\beta_n}^{\beta} f_n \longrightarrow 0$

__Ισχυρισμός:__ $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M > 0$ τω $\|f_n\|_\infty < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

__Απόδειξη__

$\|f_n\|_\infty = \|(f_n - f) + f\|_\infty \leq \underbrace{\boxed{\|f_n - f\|_\infty}}_{\to 0} + \underbrace{\boxed{\|f\|_\infty}}_{\text{είναι κάποιος αριθμός}}$

Αφού $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Rightarrow \{\|f_n - f\|_\infty\}$ φραγμένη ακολουθία

$\Rightarrow \{\|f_n\|_\infty\}$ φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M > 0$ τω $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\|f_n\|_\infty} \leq M$

$\| \ = \sup\{|f_n(x)| \ x \in [a,\beta]\}$

Άρα $\left| \int_a^{a_n} f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^{a_n} |f_n(x)|\,dx \leq \int_a^{a_n} M\,dx$

$= M(a_n - a) \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^{a_n} f_n(x)\,dx \to 0}$$

Όμοια: $\boxed{\int_{\beta_n}^{\beta} f_n(x)\,dx \to 0}$

Άσκηση 5 (X,d) συμπαγής, $L \subseteq C(X)$ lattice

Νδο $\overline{L}$ lattice

Λύση:

L διανυσματικός χώρος ως lattice $\xrightarrow[\text{δείξει}]{\text{Το έχουμε}}$ $\overline{L}$ διανυσ. χώρος

Άρα αρκεί νδο αν $f \in \overline{L} \Rightarrow |f| \in \overline{L}$

Έστω $f \in \overline{L} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq L$ τ.ω $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$

Όμως $|f_n| \in L$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (διότι L lattice) και

$\boxed{|f_n| \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} |f|} \Rightarrow |f| \in \overline{L}$

ισχύει διότι

$\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\big||f_n(x)| - |f(x)|\big| \leq |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Άσκηση 6 Έστω (X,d) συμπαγής. Νδο (X,d) διαχωρίσιμος

δλδ $\exists F \subseteq X$ $\overline{F} = X$, F αριθμήσιμο

Λύση:

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η οικογένεια $\{B(x, 1/n) : x \in X\}$

είναι ανοιχτή ~~κάλυψη~~ του X. Άρα $\exists x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n \in X$ τ.ω

$\boxed{X = \bigcup_{i=1}^{k_n} (x_i^n, 1/n)}$ $(*)$

Θέτουμε $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\}$

F το πολύ αριθμήσιμο

Αρκεί νδο $\boxed{\overline{F} = X \iff \forall \varepsilon>0, \forall x\in X\ \exists y\in F \text{ τω } x\in B(y,\varepsilon)}$

Έστω $\varepsilon>0$, $x\in X$, $\exists n\in\mathbb{N}$ τω $1/n<\varepsilon$

$(*) \Rightarrow \exists i \in \{1,\ldots,k_n\}$ τω $x\in B(x_i^n, 1/n) \subseteq B(x_i^n, \varepsilon)$

Άρα διαλέγω για $y = x_i$

Άσκηση Νδο $C([a,b])$ διαχωρίσιμος

Λύση:

Έστω $F = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, n\in\mathbb{N}, a_i,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}\}$

έστω $\varepsilon>0$

$\forall$ πολυώνυμο P (μιας μεταβλητής) υπάρχει κάποιο πολυώνυμο $Q\in F$ με $\underbrace{\|P-Q\|_\infty}_{\sup\{|P-Q|\ x\in[a,b]\}} < \varepsilon/2$

Έστω $f\in C([a,b])$ $\exists$ πολυώνυμο P τέτοιο ώστε $\|f-P\|_\infty < \varepsilon/2 \Rightarrow \exists Q\in F$: $\|f-Q\|_\infty \leq \|f-P\|_\infty + \|P-Q\|_\infty$

$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$

Ασκηση $f \in C(X): X \to \mathbb{R}$ (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος
και $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε
$g \circ f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} g \circ f$

Λύση:

Δείξαμε: $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη $\Rightarrow \exists M>0$ τω
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $|f_n(x)| \leq M$

Όμως: η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$. Δηλ.
$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τω $\forall s,t \in [-M,M]$ με $|s-t|<\delta$ $|g(s)-g(t)|<\varepsilon$

Όμως: $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$: Έστω $\delta>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x)-f(x)|<\delta$

Για $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $|g(f_n(x)) - g(f(x))|<\varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$

$\Rightarrow g \circ f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} g \circ f$

Ασκηση 8 $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (συνεχής) $f_n(x) = f(x^n)$ $x \geq 0$
Αν $\{f_n\}$ είναι ισοσυνεχής στο $x=1$ νδο f=σταθερή

Λύση:

Έστω $a \in (0,\infty)$ $x_n = a^{1/n} \to 1$

Όμως $\{f_n\}$ ισοσυνεχής $\Rightarrow$
Έστω $\varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ τω $\forall y \in (1-\delta, 1+\delta) \cap [0,\infty)$: $|f_n(y)-f_n(1)|<\varepsilon$
$\forall n \in \mathbb{N}$

$x_n \to 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $x_{n_0} \in (1-\delta, 1+\delta) \Leftrightarrow a^{1/n_0} \in (1-\delta, 1+\delta)$

$\Rightarrow |\underbrace{f_{n_0}(a^{1/n_0})}_{=f(a)} - \underbrace{f_{n_0}(1)}_{=f(1)}| < \varepsilon \Rightarrow |f(a)-f(1)|<\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow f(a)=f(1)$ $\forall a \in (0,\infty)$

$\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(a)=f(1)$ $\forall a \in [0,\infty)$

Άσκηση 9 $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$

και $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \quad x \in [a,b]$

Νδο $\{g_n\}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία

Λύση

$\exists M>0$ τω $\forall x \in [a,b]$ κ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq M$

$$\Rightarrow |g_n(x)| = \left| \int_a^x f_n(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t)|\,dt \leq M(x-a)$$

$$\leq M(\beta - a)$$

$\forall x \in [a,b] \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\{g_n\}$ ομοιομ. φραγμένη.

Έστω $a \leq x < y \leq \beta$

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \left| \int_x^y f_n(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f_n(t)|\,dt \leq M(y-x)$$

$\Rightarrow \forall x,y \in [a,\beta]$ $|g_n(x) - g_n(y)| \leq M(y-x)$

Έστω $\varepsilon > 0$, έστω $x \in [a,\beta]$

Τότε $\forall y \in [a,\beta]$ με $|x-y| < \varepsilon/M$

ισχύει $|g_n(x) - g(y)| < \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\{g_n\}$ ισοσυνεχής

A-A $\Longrightarrow$ έπεται το συμπέρασμα

Άσκηση 10 Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. $A \subseteq C(X)$ ισοσυνεχές

ΝΔΟ ~~A ομοιόμορφα ισοσυνεχές~~ δηλ

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ τ.ω $\forall x,y \in X$ με $d(x,y)<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \ \forall f \in A$

Λύση:

Για $x \in X$ $\exists r_x>0$ τ.ω $\forall y \in B(x,r_x) : |f(x)-f(y)|<\varepsilon \ \forall f \in A$

$\{B(x, r_x/2) \ x \in X\}$ ανοιχτή κάλυψη του $X \Rightarrow$

$\exists x_1,\dots,x_n \in X$ τ.ω $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}/2)$

Θέτω: $\delta = \min\left\{\frac{r_{x_1}}{2}, \dots, \frac{r_{x_n}}{2}\right\}$

Έστω $x,y \in X$ με $d(x,y)<\delta$ $\exists i \in \{1,\dots,n\}$ τ.ω $y \in B(x_i, r_{x_i}/2)$

$d(x,x_i) \leq d(x,y) + d(y,x_i) < \delta + d(y,x_i) \leq \frac{r_{x_i}}{2} + \frac{r_{x_i}}{2} \leq r_{x_i}$

$\Rightarrow x,y \in B(x_i, r_{x_i}) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq$

$\leq |f(x)-f(x_i)| + |f(y)-f(x_i)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$

$\forall f \in A$

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 5

Έστω (X,d) μ.χ., $A \subseteq C(X)$, $\mathcal{A}$ η άλγεβρα που παράγεται από το A

Έστω S_N η οικογένεια όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, N μεταβλητών.

$\boxed{\text{Αν } A=\{f_1, \ldots, f_N\}}$ Νδο $\boxed{\mathcal{A} = \{P(f_1, f_2, \ldots, f_N) : P \in P_N\}}$

$\mathbb{1}$

$\shortparallel$ B

Λύση:

$f_1^{k_1}, f_2^{k_2}, \ldots, f_N^{k_N} \in \mathcal{A} \quad \forall k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Longrightarrow \forall a_{k_1}, \ldots, a_{k_N} : \sum a_{k_1}\ldots a_{k_N} f_1^{k_1} \ldots f_N^{k_N} \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow P(f_1, \ldots, f_N) \in \mathcal{A} \quad \forall P \in S_N$

διότι: $P(X_1, \ldots, X_n) = \sum a_{k_1, \ldots, k_N} X_1^{k_1} \ldots X_N^{k_N}$

Όμως B άλγεβρα συνόλων κ $\mathbb{1} \in B$, $f_1, \ldots, f_N$

Επειδή $\mathcal{A} \supseteq B \Longrightarrow \mathcal{A} = B$

Άσκηση 2 Φυλλάδιο 5

Έστω $V = \emptyset$ γραμμικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $\mathbb{1}, \sin x, \sin^2 x$ $x \in [0,1]$

Νδο V άλγεβρα και $\overline{V} = C([0,1])$.

Λύση:

$V = \left\{ a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x \quad n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R} \right\}$

$\Leftrightarrow V = \{ P(\sin x) \; P \in P_1 \}$

Αν $P, Q \in P_1 \Rightarrow PQ \in P_1 \Rightarrow P(\sin x)\, Q(\sin x) \in V$

$\Rightarrow \boxed{V \text{ άλγεβρα}}$

Αρκεί λοιπά από Stone-Weistress νδο V διαχωρίζει τα σημεία του $[0,1]$.

Έστω $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$. Τότε $\exists f \in V$ τ.ω $f(x) \neq f(y)$ όταν $f(x) = \sin x$.

$\longleftrightarrow$

Άσκηση 4 Φυλλάδιο 5

Νδο η άλγεβρα A που παράγεται από τις συναρτήσεις $\mathbb{1}, x^2$ είναι πυκνή στο $C([0,1])$ αλλά όχι στο $C([-1,1])$.

Λύση:

- Η A είναι άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων: $[0,1] \to \mathbb{R}$ περιέχει την $\mathbb{1}$ και διαχωρίζει τα σημεία του $[0,1]$ επειδή π.χ η x^2 είναι 1-1 στο $[0,1]$.
  $\xrightarrow{S-W} \overline{A} = C([0,1])$

- $A = \{ P(x^2) : P \in P_1 \} \Rightarrow \forall f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $f \in A$ f άρτια $(f(-x) = f(x) \; \forall x \in [-1,1])$.

Έστω $f \in \overline{A} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq A$ τω $f_n \to f$

$f_n(x) = f_n(-x) \; \forall x \in [-1,1] \Rightarrow$

$f(x)$ $\quad f(-x)$

$\Rightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in [-1,1]$

$\Rightarrow \forall f \in \overline{A}$, f άρτια $\Rightarrow \overline{A} \neq C([-1,1])$

Ασκηση 3 Φυλλάδιο 5

(X,d) συμπαγής $\Rightarrow C(X)$ διαχωρίσιμος

Λύση:

$1 = f_0$

$f_n(x) = d(x, x_n)$ $n \in \mathbb{N}$ όπου $\{x_n \; n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X

Εστω A η άλγεβρα που παράγεται απ' τις $f_0, f_1, f_2, \ldots$

Θδο A διαχωρίζει τα σημεία του X.

Εστω $a, \beta \in X$ $a \neq \beta$.

Αν A δεν διαχωρίζει τα σημεία του X τότε για

$f_n(a) = f_n(\beta)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow d(a, x_n) = d(\beta, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{x_n \; n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό στο X, $\exists \{x_{k_n}\}$ τ.ω $x_{k_n} \to a$

$\Rightarrow d(a, x_{k_n}) = d(\beta, x_{k_n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{d(a,a)}_{0} = d(a,\beta) \Rightarrow \boxed{a = \beta} \to$ Ατοπο.

$\Rightarrow \boxed{\overline{A} = C(X)}$

Ισχυρισμός: $A = \left\{ p(f_{i_1}, \ldots, f_{i_N}) \;\middle|\; \begin{array}{l} N \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ i_1, \ldots, i_N \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ p \in P_N \end{array} \right\}$

$A = \left\{ \sum a_{i_1, \ldots, i_N} f_{i_1, \ldots, i_N}^{k_1, \ldots, k_N} \quad a_{i_1, \ldots, i_N} \in \mathbb{R} \quad - \mid - \right\}$

$F = \left\{ \quad -\mid- \quad a_{i_1, \ldots, i_N} \in \mathbb{Q} \right\}$ αριθμήσιμο

$\overline{F} \supseteq A \Rightarrow \boxed{\overline{\overline{F}}} \supset \overline{A} = C(X)$

$\parallel$

$\overline{F}$